数理解析研究所講究録 1236 巻 2001 年 49-59

3次元双曲型空間における平坦な曲面

広島大学理学研究科 梅原雅顕 (Masaaki Umehara)
Graduate School of Science Hiroshima Univ.
東京電機大学工学部 國分雅敏 (Masatoshi Kokubu)
School of Engineering Tokyo Denki Univ.
九州大学数理学研究院 山田光太郎 (Kotaro Yamada)
Faculty of Mathematics Kyushu Univ.

§1 動機と概要

Riemann 面 M 上の有理型写像

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : M \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C}) \tag{1.1}$$

は F による Killing 形式の引き戻しが消えるとき **null curve** とよばれる．これは，局所複素座標 z についての微分 $F_z = \partial F/\partial z$ の階数が至るところ 1 以下ということと同値である．このような null curve F について，

$$G = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD} \tag{1.2}$$

$$g = -\frac{dB}{dA} = -\frac{dD}{dC} \tag{1.3}$$

によって定まる有理型関数 G を双曲的ガウス写像とよび，g を第二ガウス写像とよぶ.

1993 年, Small [S] は，M 上のすべての null curve F は逆に M 上の有理型関数の対 (G, g) によって以下のように構成されることを発見した[1].

$$F = \begin{pmatrix} G\dfrac{da}{dG} - a & G\dfrac{db}{dG} - b \\ \dfrac{da}{dG} & \dfrac{db}{dG} \end{pmatrix}, \qquad \left(a := \sqrt{\frac{dG}{dg}}, \quad b := -g\sqrt{\frac{dG}{dg}} \right). \tag{1.4}$$

[1] これから紹介する Small の公式の我々の証明以外にも，最近，Sa Earp と Toubiana の共著論文 [ET] により，この方法の別方面からの幾何学的な証明が得られている．また，この原稿作成中に送られてきた，Lima と Roitman の共著論文 [LR] によれば，この公式は 1920 年代に Bianchi [Bi] によって implicit に発見されていたらしいが，ここでは一応「Small の公式」とよぶことに

この公式の特徴は，F が微分だけの式で書けていることである．この公式から特に F は $\pm$ の符号の差を除き，２つのガウス写像から一意に決まってしまうことがわかる．一意性自体は Small の公式 (1.4) を通さずに簡単に証明することができる（[UY2] 参照）．論文 [UY2] では，この一意性を用いて，与えられた双曲的ガウス写像を持ち，分岐点を許す conformal CMC-1 曲面 と 曲面上のガウス曲率１の円錐的特異点を許容する共形的計量 との間に一対一の対応があることを示した．

今回の我々の研究の発端は，上の Small の公式の簡単な別証明を与えたことに始まる．その証明法の発展として同様の構成を $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ の Legendre curve にも適用できることを述べ，3 次元双曲型空間 H^3 の平坦な曲面への応用を与えたい．

§2　$\boldsymbol{C}^3$ の null curve

まず，$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ の null curve についての Small の公式の導出について述べる前に，$\boldsymbol{C}^3$ の null curve について知られる古典的な公式について記しておこう．

正則写像 $F: M \to \boldsymbol{C}^3$ は局所複素座標 z に関する微分の内積 $F_z \cdot F_z$ が消えるとき，すなわち

$$F_z \cdot F_z = 0 \tag{2.1}$$

となるとき null あるいは isotropic とよばれる．$\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面は $\boldsymbol{C}^3$ の null curve の実部として表されるので，以下の公式は，$\boldsymbol{R}^3$ の極小曲面とも深い関係をもつ．

いま，null curve $F = (F^1, F^2, F^3)$ に対して

$$\omega := d(F^1 - iF^2), \qquad g := dF^3/\omega \tag{2.2}$$

とおくと (2.1) より

$$dF = \frac{1}{2}\big((1-g^2)\omega, i(1+g^2)\omega, 2g\omega\big) \tag{2.3}$$

となる．逆に，与えられた (g,ω) に対して (2.3) を積分すれば null curve が得られるが，一方，二つの有理型関数の組 (g,h) に対して

$$F = \begin{pmatrix} 1 & g & (1-g^2)/2 \\ i & ig & i(1+g^2)/2 \\ 0 & -1 & g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad \left(h_1 = \frac{dh}{dg},\ h_2 = \frac{dh_1}{dg} \right) \tag{2.4}$$

とすれば F は null curve を与える．これが Small の公式に相当する $\boldsymbol{C}^3$ の null curve の表現公式である．このとき $\omega = dh_2$ とおけば (2.3) が得られる．逆に，Riemann 面 M 上の任意の null meromorphic curve は(2.4) によって得られる．すなわち，積分を用いず微分だけの式によってすべての null meromorphic curve を表すことができる．(江尻氏によって，$\boldsymbol{C}^n$ $(n \geq 4)$ の高次の null curve についてこの公式の拡張が得られている [E]）．

ここではまず，上の公式 (2.4) の簡単な導出法を紹介しよう．

（C^3 の場合の証明） まず F が null であるから (2.2) とおくと(2.3) が成り立つことが簡単に確かめられる．特に F^1, F^2, F^3 の一次結合で表される関数 f, φ, ψ を

$$f = F^1 - iF^2, \quad \psi = -F^1 - iF^2, \quad \varphi = F^3$$

とおけば

$$df = \omega \tag{2.5}$$

$$d\varphi = g\omega \tag{2.6}$$

$$d\psi = g^2\omega \tag{2.7}$$

となる．いま

$$\varphi = fg - H$$

によって新しい関数 H を定義すると (2.6) より，

$$g\omega = d(fg - H) = g\omega + fdg - dH$$

となるから

$$f = dH/dg,$$

つまり (f, φ) は (H, g) の微分だけの式で表される．今度は

$$\psi = fg^2 - 2Hg + 2h$$

によって新しい関数 h を定義する．すると (2.7) より

$$\begin{aligned} g^2\omega &= d(fg^2 - 2Hg + 2h) \\ &= g^2df + 2fg\,dg - 2g\,dH - 2H\,dg + 2dh \\ &= g^2\omega + 2fg\,dg - 2fg\,dg - 2Hdg + 2dh \\ &= g^2\omega - 2H\,dg + 2dh \end{aligned}$$

であるから

$$H = dh/dg$$

となり，H は (g, h) の微分だけの式で表され，結局 f, φ, ψ が (g, h) の微分だけの式で表されたことになる．これをまとめると (2.4) となる．逆に (2.4) が null になることは，直接計算で確かめられる．

§3 SL$(2,\boldsymbol{C})$ の null curve

§1 で紹介した Small の公式の Small 氏自身による導出法は，代数幾何的な観点に基づいた深いものであるが，難解である．この公式を，$\boldsymbol{C}^3$ の場合と同様に，部分積分だけを用いて，あまり天下り的ではなく簡単かつ自然に導くことができないだろうか．ここで，國分氏による，そのような証明法の一つを紹介しよう．

(SL$(2,\boldsymbol{C})$ の場合の証明) $F\colon M \to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ を null meromorphic curve とする．(1.2) より

$$dA = G\,dC, \qquad dB = G\,dD \tag{3.1}$$

となる．これを部分積分して，以下の式を得る．

$$A = GC - a, \qquad B = GD - b. \tag{3.2}$$

但し

$$a = \int_{z_0}^{z} C\,dG, \qquad b := \int_{z_0}^{z} D\,dG \qquad (z_0 \text{ は } M \text{ 上の基点}). \tag{3.3}$$

すると

$$C = \frac{da}{dG}, \qquad D = \frac{db}{dG} \tag{3.4}$$

と書けるから，F は a, b を用いて以下のように書ける．

$$F = \begin{pmatrix} G\dfrac{da}{dG} - a & G\dfrac{db}{dG} - b \\ \dfrac{da}{dG} & \dfrac{db}{dG} \end{pmatrix}.$$

ここで $\det F = 1$ なので次を得る．

$$\det \begin{pmatrix} -a & -b \\ \dfrac{da}{dG} & \dfrac{db}{dG} \end{pmatrix} = 1. \tag{3.5}$$

この式を微分して

$$\det \begin{pmatrix} -a & -b \\ d\left(\dfrac{da}{dG}\right) & d\left(\dfrac{db}{dG}\right) \end{pmatrix} = 0. \tag{3.6}$$

(3.4) と (3.6) より次を得る.

$$g = -\frac{dD}{dC} = -\frac{d\left(\dfrac{db}{dG}\right)}{d\left(\dfrac{da}{dG}\right)} = -\frac{b}{a}.$$

これより,

$$b = -ag \tag{3.7}$$

$$db = -(da)g - a(dg) \tag{3.8}$$

となるが, 再び (3.5) を用いて

$$dG = \det\begin{pmatrix} -a & -b \\ da & db \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -a & -ag \\ da & -(da)g - a(dg) \end{pmatrix} = a^2 dg.$$

これと (3.7) より

$$a = \sqrt{\frac{dG}{dg}}, \quad b = -g\sqrt{\frac{dG}{dg}},$$

が得られ公式が証明された.

§4 SL(2, $\boldsymbol{C}$) の Legendre curve

前節の証明法を, 別の対象 $SL(2,\boldsymbol{C})$ の Legendre curve に適用し, 新しい Small 型の公式を見つけることを考える.

まず, Legendre curve を定義する. Gálvez, Martínez, Milán [GMM] にしたがい, 有理型写像

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : M \to \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \tag{4.1}$$

は E による contact form の引き戻し $DdA - BdC$ が消えるとき **Legendre curve** (論文 [GMM] では **contact curve** と呼ばれている.) とよぶ.

Legendre curve E に対して

$$G = \frac{A}{C} \tag{4.2}$$

$$\omega = \frac{dA}{B} = \frac{dC}{D} \tag{4.3}$$

によって定まる有理型関数 G と有理型一次形式 ω をそれぞれ**双曲的ガウス写像**, **canonical form** とよぶ. このとき, 我々は, 次のような Small 公式の類似の結果を得た.

定理 1. 与えられた双曲的ガウス写像 G と canonical form ω をもつ Legendre meromorphic curve $F : M \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ は，以下の式で与えられる．

$$E = \begin{pmatrix} A & dA/\omega \\ C & dC/\omega \end{pmatrix}, \qquad \left(A := iG\sqrt{\frac{\omega}{dG}},\ C := i\sqrt{\frac{\omega}{dG}} \right). \tag{4.4}$$

逆に，与えられたリーマン面 M 上の定数でない有理型関数と有理型 1 形式の対 (G, ω) に対して，上の式で与えられる E は Legendre meromorphic curve となる．

（証明） E を M 上で定義された $\mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$ の Legendre curve とすると，定義から

$$E = \begin{pmatrix} A & dA/\omega \\ C & dC/\omega \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

と書ける（[GMM] 参照）．ここで

$$E^{-1}dE = \begin{pmatrix} 0 & f \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \omega \tag{4.6}$$

とおく．すると $X = A, C$ は以下の微分方程式を満たす ([GMM, (19)]).

$$X'' - (\log \hat{\omega})' X' - f \hat{\omega}^2 X = 0, \tag{4.7}$$

ここで $' = d/dz$ は，局所複素座標 z に関する微分であり，また $\omega = \hat{\omega}(z) dz$ とする．

双曲的ガウス写像 G は (4.2) を満たすので，$A = CG$ となる．関係式 $X = CG$ を (4.7) に代入して, $X = C$ も (4.7) を満たすことに注意すれば次の関係式をえる．

$$2G'C' + (G'' - (\log \hat{\omega})' G')\, C = 0.$$

これを書き直すと

$$d(\log C) = -d \left(\log \sqrt{\frac{dG}{\omega}} \right).$$

となる．さらにこれを積分して，

$$C = k\sqrt{\frac{\omega}{dG}} \tag{4.8}$$

$$A = CG = kG\sqrt{\frac{\omega}{dG}}, \tag{4.9}$$

を得る．但し k は定数である．(4.8) と (4.9) より，

$$1 = \det E = \det \begin{pmatrix} A & dA/\omega \\ C & dC/\omega \end{pmatrix} = -k^2$$

となる．したがって $k = i$ であり，

$$C = i\sqrt{\frac{\omega}{dG}} \qquad A = CG = iG\sqrt{\frac{\omega}{dG}}.$$

となる．これで結論が示された．

§5 H^3 の平坦な曲面

よく知られるように $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ の null curve は H^3 の平均曲率 1 の曲面と縁が深い．実際，F を リーマン面 M から $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への null holomorphic immersion とすると，$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ から 3次元双曲型空間への自然な射影

$$\pi\colon \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C}) \to H^3 = \mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})/\,\mathrm{SU}(2)$$

との合成 $\pi\circ F\colon M \to H^3$ は，平均曲率 1 の conformal immersion となる ([B])．

同様に Legendre curve は H^3 の平坦な曲面と深い関係をもつ．古くは Volkov-Viladimilova や 佐々木重夫氏により，H^3 の平坦な曲面で完備なものは，horosphere か 測地線からの等距離曲面に限ることなどが知られていた．一方，最近 Gálvez, Martínez, Milán [GMM] により，上で述べた null curve と平均曲率 1 の曲面との関係の類似として，E を リーマン面から $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への Legendrian holomorphic immersion とすると，$\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ から H^3 への自然な射影との合成 $\pi\circ E : M \to H^3$ は，平坦な immersion となり，その第二基本形式[2]から定まる共形構造とコンパチブルになることを示した．逆に H^3 の平坦な曲面は，すべてこのようにして得られる．さらに [GMM] では，平均曲率 1 の曲面の場合の [UY1] の手法を用いて，このような平坦な曲面の完備なエンドの形状等が調べられ，上述の古典的な結果の別証明が与えられた．

しかし，完備な平坦曲面が horosphere か 測地線からの等距離曲面に限るという事実は，平坦な曲面の大域的な研究があまり面白くないことを意味しているといえよう．実際，H^3 の平均曲率 1 の曲面の理論が，実り豊かなのものになっているのは，完備な曲面が豊富に存在するからにほかならない．

> 「平坦な曲面についても，完備性を緩めて，もっと広い曲面のクラスを考えることによって，平均曲率 1 の曲面の場合と同様の豊かな理論ができないだろうか」．

---

[2] 自動的に正定値か負定値になる．

これが，我々の今回の研究動機の一つであった．この問いの一つの答えとして，以下のような「一般化された平坦な曲面」のクラスを設定し，前節の公式の応用として，一つの大域的な結果を得たので以下に紹介したい．

(一般化された平坦な曲面) 平坦な H^3 の曲面で，完備ではないが，完備なエンドをもつものを考える．このような曲面は，一般に特異点を許容する．ここで，平坦な曲面の平行曲面，すなわち法測地線にそって一定の距離だけ移動させて得られる曲面はまた平坦である．そこで，平行曲面をとると解消されるような特異点のことを**見かけ上の特異点**とよぶことにする．特異点がすべて見かけ上の特異点であるような平坦な曲面（あとで定義する「一般化された平坦な曲面」）を考えると，豊富な例と，興味深い大域的不等式（定理 3）を備えた新しい研究対象が，視界に広がってくるのである．

まず，見かけ上の特異点しかもたない曲面の意味をはっきりさせるために，曲面のもう一つの双曲的ガウス写像を定義しよう．

いま，$f: M \to H^3$ を immersion とする．f の定める曲面の各点 p から法線方向に測地線を延ばし，それが理想境界 $S^2 = \partial H^3$ にぶつかる点（の立体射影による像）が 双曲的ガウス写像の値 $G(p)$ である．ところが，法線方向は 2 方向あるので，$G(p)$ とは逆方向に測地線を延ばし，理想境界 $S^2 = \partial H^3$ にぶつかる点を $G_+(p)$ とおくと，これによって，もう一つのガウス写像

$$G_+ : M \to S^2 = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$$

が定まる．これを曲面の**第二双曲的ガウス写像**とよぶ.（このガウス写像を G_+ と表した都合上，もとの双曲的ガウス写像は $G = G_-$ で表すことにする.）3 次元双曲型空間の測地線は H^3 の理想境界上の相異なる 2 点を指定することで一意に定まるから，測地線の全体 $\mathrm{Geod}(H^3)$ を

$$\mathrm{Geod}(H^3) := (S^2 \times S^2) \setminus \{\text{diagonal set}\}$$

と同一視できる．このとき二つの双曲的ガウス写像の対として定まる写像

$$\nu = (G_-, G_+) : M \to \mathrm{Geod}(H^3)$$

は，曲面の各点に法測地線を対応させる写像と考えることができる．

さて，話を H^3 の平坦な曲面に戻そう．M をリーマン面とし，$f: M \to H^3$ が Legendre curve

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : M \to \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{C})$$

の射影として得られているとすると，二つのガウス写像 $G=G_-$ と G_+ は共に有理型で

$$G(=G_-)=\frac{A}{C},\qquad G_+=\frac{B}{D}$$

と表される．さらに次の命題を示すことができる．

命題 1. リーマン面 M から $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ への Legengdre holomorphic map が見かけ上の特異点しか持たないための必要十分条件は，$S^2\times S^2$ への写像 $\nu=(G_-,G_+)$ が immersion となることである．

この命題をふまえて，ν が immersion となるような Legendre holomorphic map の H^3 への射影を**一般化された平坦な曲面** とよぶことにする．前節の定理 1 の応用として，このような曲面を構成するのに便利な次の定理を示すことができる．

定理 2. M をリーマン面とし，G_-,G_+ を二つの有理型関数とする．もしも

$$\int_\gamma \frac{dG_-}{G_--G_+}\in i\boldsymbol{R} \tag{5.1}$$

が M のすべての閉路 γ について成り立つなら，

$$E=\begin{pmatrix} G_-/\alpha & \alpha G_+/(G_--G_+) \\ 1/\alpha & \alpha/(G_--G_+)\end{pmatrix},\qquad \left(\alpha:=\exp\left(\int_{z_0}^{z}\frac{dG_-}{G_--G_+}\right)\right)$$

の H^3 への射影は，一般化された平坦な曲面を与える．(ただし $G_+=G_-$ となる点では，曲面は定義されない.)

この定理によって，完備なエンドをもつ一般化された平坦な曲面をたくさん構成することができる．実際，$G_-=G_+$ となる点が，上の構成法ではエンドとなるが，エンドの完備性は，簡単な条件で確かめることができる．

一般化された平坦な曲面の完備なエンドにおいて G_+,G_- が共に 真性特異点をもたないとき，このエンドは **regular** であるという．このとき，以下のような大域的な結果を得た．

定理 3. すべてのエンドが regular であるような一般化された平坦な曲面について，次の不等式が成り立つ．

$$\deg G_-+\deg G_+\geq (\text{end の数}) \tag{5.2}$$

ここで deg は，有理型関数の写像度を表す．さらに，この不等式で等号成立のための必要かつ十分な条件は，曲面のすべてのエンドが embedded であることである．

すべてのエンドが regular であるような H^3 の平均曲率1の曲面 M の双曲的ガウス写像 G について

$$\deg G \geq -\chi(M) + (\text{end の数})$$

が成り立ち等号成立のための必要十分条件は，曲面のすべてのエンドが embedded であることが知られている（[UY3]）．この定理は，そのアナロジーと解釈することができる．

実際に先の構成定理（定理2）を用いて，上の不等式の等号を満たすような曲面の例を構成することができる．

例 1. $M = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ とし

$$G_- = z, \qquad G_+ = -z$$

とおけば，定理2の条件 (5.1) は満たされ，対応する平坦な曲面は，1本の測地線からの等距離曲面と一致する．この場合，不等式 (5.2) の等号が成立する．

例 2. 今度は

$$G_- = z, \qquad G_+ = z^{n+1} \qquad (n \text{ は } 0 \text{ でない整数})$$

とすると，この場合にも定理2の条件 (5.1) は満たされる．$n = -1$ のときは，$\boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \setminus \{1\}$ 上で定義された horosphere を表す．また $n \leq -2$ のときは $\boldsymbol{C} \cup \{\infty\} \setminus \{1, \zeta_{|n|}, \cdots, (\zeta_{|n|})^{|n|-1}\}$ （但し ζ_m は1の原始 m 乗根）で定義された $|n|$ 個のエンドを持つ一般化された平坦な曲面となる．特に $n = -2$ のときは，回転不変な曲面となることを注意しておく．また $n \geq 1$ のときは $\boldsymbol{C} \setminus \{0, 1, \zeta_n, \ldots, (\zeta_n)^{n-1}\}$ で定義された $n+2$ 個のエンドを持つ一般化された平坦な曲面となる．これらの曲面は，すべて不等式 (5.2) の等号を満たし，自己交叉 のないエンドをもつ．

一般化された平坦な曲面について，現在まだ研究が進行中で，最後の節で証明抜きで紹介した結果や，さらなる発展については，筆者等の論文 [KUY] に掲載する予定である．

参考文献

[Bi] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale,* Terza Edizione, Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1927.

[Br] R. Bryant, *Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space,* Astérisque **154–155** (1987), 321–347.

[ET] R. Sa Earp and E. Toubiana, *Meromorphic data for mean curvature one surfaces in hyperbolic space,* preprint.

[E] N. Ejiri, *Degenerate minimal surfaces of finite total curvature in* R^N, Kobe J. Math. **14** (1997), 11–22.

[GMM] J. Gálvez, A. Martínez, F. Milán, *Flat surfaces in hyperbolic* 3*-space,* Math. Ann. **316** (2000), 419–435.

[KUY] M. Kokubu, M. Umehara and K. Yamada, *Small's type formula for contact curves in* $\mathrm{SL}(2,\boldsymbol{C})$ *and its applications to flat surfaces in hyperbolic* 3*-space,* in preparation.

[LR] L. L. Lima and P. Roitman, *CMC*-1 *surfaces in hyperbolic* 3*-space using the Bianchi-Calò method,* preprint.

[S] A. J. Small, *Surfaces of Constant Mean Curvature* 1 *in* H^3 *and Algebraic Curves on a Quadric,* Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 1211–1220.

[UY1] M. Umehara and K. Yamada, *Complete surfaces of constant mean curvature*-1 *in the hyperbolic* 3*-space,* Ann. of Math. **137** (1993), 611–638.

[UY2] M. Umehara and K. Yamada, *Surfaces of constant mean curvature-c in* $H^3(-c^2)$ *with prescribed hyperbolic Gauss map,* Math. Ann. **304** (1996), 203–224.

[UY3] M. Umehara and K. Yamada, *A duality on CMC*-1 *surface in the hyperbolic* 3*-space and a hyperbolic analogue of the Osserman Inequality,* Tsukuba J. Math. **21** (1997), 229–237.